

Domácí úlohy z prosemináře - 2. sada

1. příklad z písemky

1. Urči hodnotu $436^{87} \pmod{49}$.
2. Urči hodnotu $436^{170} + 221^{18} \pmod{63}$.
2. Urči hodnotu $355^{437} \pmod{125}$.

2. příklad z písemky

1. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $2a^2 = 5 - 11b$.
2. Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $7x^2 - 5y^2 = 4$.
3. Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $2^x = 3 + 5y$.

3. příklad z písemky

1. Najdi všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ taková, že $17x + 15y = 2$.
2. Najdi všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ taková, že $63x - 42y + 51z = 7$.
3. Najdi všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ taková, že $12x + 10y - 15z = 7$.

4. příklad z písemky

1. Urči, jakých hodnot může nabývat $x^2 \pmod{7}$.
2. Urči, jakých hodnot může nabývat $3^x \pmod{5}$.
3. Mějme celá čísla x, y taková, že $11|x^2 + y^2$. Dokaž, že $11|x$ a $11|y$.

5. příklad z písemky

1. Najdi všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ taková, že $x^3 + 3y^3 = 9z^3$.
2. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $3^a = b^2 + c^2$.

6. příklad z písemky

1. Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $y^3 = x^3 + 5x^2 + 12x + 8$.
2. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $7a^2 + 3b^2 = 82$.

7. příklad z písemky

1. Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $xy = x + y$.
2. Najdi všechna celočíselná řešení rovnice $x^2 = pq + y^2$ taková, že p, q jsou prvočísla a $x, y \geq 0$.
3. Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ (rada: vytkni na levé straně $1 + x$).

8. příklad z písemky

1. Najdi všechny polynomy $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takové, že $P(5) = 15$ a $P(26) = 42$.
2. Mějme polynom $P(x)$ s celočíselnými koeficienty takový, že existují celá čísla r, s taková, že $P(r) = P(s) + 1$. Dokaž, že $r = s + 1$ nebo $r = s - 1$.

9. příklad z písemky

1. Dokaž, že $\sqrt{5}$ je algebraické číslo. Je racionální?
2. Dokaž, že $\sqrt{3} + \sqrt{7}$ je algebraické číslo. Je racionální?
3. Najdi dvě iracionální čísla taková, že jejich součin je racionální.